2. Extrema libres et sous contrainte : solution de l'exercice 5

Exercice 5. On donne les fonctions f et g explicitement par

$$f(x, y) = xy \qquad \text{et} \qquad g(x, y) = 4x^2 + y^2.$$

(i) Déterminer les éventuels extrema libres de f.
(ii) S'ils existent, déterminer les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 1$.
(iii) S'ils existent, déterminer les extrema de f dans l'ensemble (à représenter)

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0 \ \text{ et } \ g(x, y) \leq 1\right\}.$$

Solution :

(i) Bien sûr, $f \in C_2(\mathbb{R}^2)$ et $D_x f(x, y) = y$, $D_y f(x, y) = x$, de sorte que f n'admet qu'un point stationnaire en $(0, 0)$.

Comme $D_x^2 f(x, y) = D_y^2 f(x, y) = 0$ et $D_x D_y f(x, y) = 1$, on en déduit que

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $\det(H_f(0, 0)) = -1 < 0$, ce qui prouve que $(0, 0)$ n'est en fait pas un extremum local de f.

(ii) Comme la courbe d'équation $g(x, y) = 1$ est un borné fermé (ellipse) et comme la fonction f y est continue, elle y admet au moins un maximum global et au moins un minimum global. Il est possible de procéder de plusieurs façons.

(a) On peut utiliser un paramétrage de la courbe considérée, à savoir

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos(\theta) \\ y = \sin(\theta), \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

Or, on a

$$f(\cos(\theta)/2, \sin(\theta)) = \frac{1}{2}\cos(\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{4}\sin(2\theta).$$

Ainsi, d'après les propriétés de la fonction sin, on atteint un maximum en $\theta \in [0, 2\pi]$ si

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{4}.$$

De même, f atteint un minimum en $\theta \in [0, 2\pi]$ si

$$2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{7\pi}{4}.$$

En traduisant ces résultats en coordonnées cartésiennes, on trouve que f admet des maxima globaux non stricts en $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2)$ et $(-\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/2)$ (où f prend la valeur $1/4$) et des minima globaux non stricts en $(-\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2)$ et $(\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/2)$ (où f prend la valeur -1/4).

(b) On peut utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange, car $g \in C_1(\mathbb{R}^2)$. On résout le système

$$\begin{cases} D_x f(x,y) = \lambda D_x g(x,y) \\ D_y f(x,y) = \lambda D_y g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda 8x \\ x = \lambda 2y \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda y \\ y = 16\lambda^2 y \\ 16\lambda^2 y^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} y = 0 \\ x = 2\lambda y = 0 \\ 16\lambda^2 y^2 + y^2 = 1 \end{cases}}_{\text{impossible}} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 16\lambda^2 = 1 \\ x = 2\lambda y \\ 2y^2 = 1 \end{cases}$$

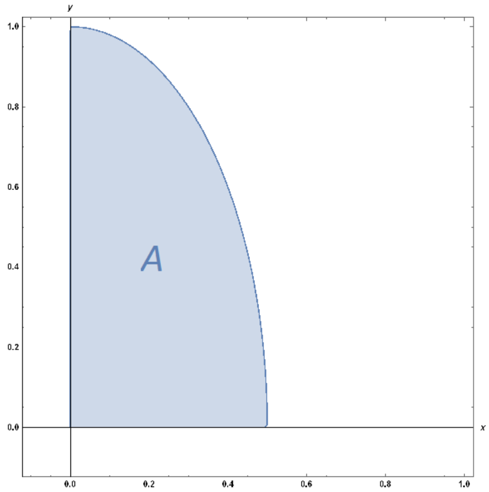
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = 2\lambda y \\ \lambda^2 = (1/4)^2 \end{cases}$$

Ainsi, les candidats-extrema trouvés sont les points de coordonnées $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2)$, $(\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2)$ et $(-\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/2)$. Vu que

$$f(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2) = f(-\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/2) = 1/4 \quad \text{et} \quad f(-\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2) = f(\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/2) = -1/4,$$

on en déduit que f atteint ses maxima globaux (non stricts) sur l'ellipse en $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2)$ et $(-\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/2)$ et ses minima globaux (non stricts) en $(-\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2)$ et $(\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/2)$.

(iii) L'ensemble A peut être répresenté comme suit (les bords étant compris) :



Bien sûr, cet ensemble est un borné fermé et comme la fonction f y est continue, elle y admet un maximum global et un minimum global. Nous allons rechercher les extrema de f sur les différentes sous-parties de A pour en déduire les extrema globaux de f sur A.

(a) Dans l'intérieur de A, i.e. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0 \text{ et } 4x^2 + y^2 < 1\}$, il n'y a aucun extremum vu le point (i).

(b) Sur l'arc d'ellipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } 4x^2 + y^2 = 1\}$, il y a un maximum global en $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2)$ vu le point (ii) (et c'est le seul extremum trouvé en (ii) dans le premier quadrant). Sur cet arc, f atteint dès lors ses minima aux extrémités, à savoir $(1/2, 0)$ et $(0,1)$.

(c) Sur les segments $[0, 1/2] \times \{0\}$ et $\{0\} \times [0,1]$, la fonction f s'annule, tous les points de ceux-ci sont à la fois maxima et minima.

Au total, les seuls minima trouvés sont les points des segments $[0,1/2] \times \{0\}$ et $\{0\} \times [0,1]$, ils constituent donc les minima globaux non stricts de f sur A. De plus, les seuls maxima trouvés ci-dessus sont les points des segments $[0,1/2] \times \{0\}$ et $\{0\} \times [0,1]$ (où f est nul) et le point $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2)$ (où f prend la valeur $1/4$) : dès lors, $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2)$ est maximum global strict de f sur A.

F. Bastin et L. Demeulenaere – 26 octobre 2016